

تخمین بهینه عدم قطعیت در مسائل معکوس خطی

نوشته: علی غلامی* و عبدالرحیم جواهریان*

* مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران.

Optimally Uncertainty Estimation for Linear Inversion

By: A. Gholami* & M. Javaherian*

* Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran.

تاریخ پذیرش: ۱۳۸۵/۰۷/۱۸

تاریخ دریافت: ۱۳۸۴/۰۶/۱۵

چکیده

مسائل معکوس به فراوانی در علوم تجربی ظاهر می‌شوند، که شامل استنباط اطلاعات در مورد سامانه‌های فیزیکی از داده‌های اندازه‌گیری شده غیر مستقیم و حاوی نوفه است. اطلاعات در مورد خطای موجود در داده‌ها، برای حل هر مسئله معکوسی ضروری است، در غیر این صورت بیان این مطلب که کدام مدل داده‌ها را به خوبی پیش‌بینی می‌کند، ناممکن خواهد شد. در عمل، به ندرت تخمین مستقیمی از خطای موجود در داده‌ها در دست است. در این مقاله با ایجاد تعادل بین داده‌های پیش‌بینی شده و ساختار داده‌ها یا مدل، مشخصات نوفه بر پایه مدل به دست آمده برای یک مشاهده منفرد از داده‌ها تخمین زده می‌شود. آنگاه مشخصات به دست آمده برای ایجاد مجموعه‌ای از مدل‌های معقول به کار برده می‌شود. در اثر تداخل مجموعه به دست آمده با مجموعه حاصل از اطلاعات اولیه در مورد پارامترهای مدل، مجموعه محدودتری از مدل‌ها حاصل می‌شود که هم با داده‌ها و هم با اطلاعات اولیه موافق هستند. همچنین از این اطلاعات اولیه برای تعیین حدود انحراف مدل مورد استفاده قرار می‌شود. روش‌های بیان شده بر روی داده‌های مصنوعی نیرخ لرزه‌ای قائم نشان داده می‌شوند.

کلید واژه‌ها: بازه‌های اطمینان، تحلیل خطا، معکوس سازی، منحنی L

Abstract

In experimental sciences we often need to solve inverse problems. That is, we want to obtain information about the internal structure of a physical system from indirect noisy observations. Information about the errors in the observations is essential to solve any inverse problem; otherwise it is impossible to say when a feature 'fits the data'. In practice, however, one seldom has a direct estimate of the data errors. Here, we exploit the trade-off between data prediction and model or data structure to determine model based estimates of the noise characteristics from a single realization of the data. Noise estimates are then used to characterize the set of reasonable models that fit the data. By intersecting set of prior model parameter constraints with the set of data fitting models, we obtain a set of models that fit the data and are in agreement with prior constraints. This prior information can also be used to set bounds on the bias. We illustrate our methods with a synthetic example of vertical seismic profiling (VSP).

Keywords: Confidence intervals, Error analysis, Inversion, L-curve

۱- مقدمه

است که مقداری برای واریانس داده‌ها از قبل در نظر گرفته شود. مسائل معکوس ژئوفیزیکی، در اصول مسائلی از نوع استنباط آماری هستند. اگر عملیات برداشت داده‌ها چندین بار تکرار شود، مؤلفه نوفه‌های تصادفی موجود در داده‌ها را می‌توان مستقیماً تعیین کرد. اما این حالت به ندرت در ژئوفیزیک اتفاق می‌افتد. (Van Wijk et al. (1998 روش‌های آماری تخمین نوفه در داده‌ها را بررسی نمودند. اصولاً تخمین عدم قطعیت داده‌ها

هدف از معکوس سازی داده‌های ژئوفیزیکی، استنباط کمی اطلاعات درباره زمین از تعداد محدودی مشاهده غیر مستقیم و حاوی نوفه است. اطلاعات درباره عدم قطعیت داده‌ها برای تعیین مدل‌هایی از زمین که با مشاهده‌ها موافق باشند، ضروری است. در عمل، معمولاً با کمینه کردن یک تابع اختلاف تعریف شده برای داده‌ها از عدم قطعیت آنها صرف‌نظر می‌شود. اما این سؤال پیش خواهد آمد که تابع هدف چه موقع بهینه می‌شود. علاوه بر اینها، معمول



از آن $L(m_{true})$ است. اگر عملگر مستقیم خطی باشد، رابطه ۱ به صورت زیر خواهد بود

$$d = A m_{true} + e + s \quad (2)$$

از آنجا که تعداد داده‌ها محدود است، می‌توان امیدوار بود که بتوان فقط تعداد محدودی پارامتر m_1 را به دست آورد. با فرض بردار شامل l عنصر اول پارامترها m_1 ، و سری m_∞ شامل بقیه پارامترها، برای رابطه ۲ می‌توان نوشت (Trampert and Snieder, 1996).

$$d = A(m_{true})_l + A(m_{true})_\infty + e + s \quad (3)$$

در این حالت، مؤلفه $A(m_{true})_\infty$ همان خطای ناشی از گسستگی عملگر مستقیم است که مجموع این خطا و مؤلفه s با هم مؤلفه خطای غیر تصادفی را ایجاد می‌کنند. در اینجا، فرض بر این است که تمام قوانین فیزیکی مسئله رعایت شده و سطح گسستگی به اندازه کافی خوب است. بنابراین، از مؤلفه خطای غیر تصادفی صرف‌نظر می‌شود. روشهای مختلفی برای جدا کردن سیگنال از نوفه وجود دارد، اما اگر باند بسامد آنها همپوشانی و مؤلفه‌های خطا همبستگی داشته باشند، این کار ناممکن خواهد بود. هر چند، چون عملگر مستقیم، داده‌ها را از یک فضای با بعد بینهایت به یک فضای با بعد محدود تصویر می‌کند، دارای یک کرنل غیر جزئی خواهد بود. بنابراین، حتی در غیاب خطاهای اندازه‌گیری و مدل‌سازی، عملگر مستقیم معکوس پذیر نخواهد بود و مدلهایی که همگی داده‌ها را در حد یکسان به خوبی پیش‌بینی می‌کنند، کاملاً زیاد هستند. اما این مشکل اصلی نیست، مشکل اصلی زمانی است که مقادیر پارامترهای این مدلها کاملاً متفاوت می‌باشند.

اگر خطاهای e غیر همبسته باشند و مشخصات آماری آنها در دست باشد، به طرق مختلف می‌توان مدلهای پیش‌بینی کننده داده‌ها را به دست آورد. برای مثال، در حضور خطاهای غیر همبسته با توزیع نرمال، یک روش محاسبه تابع

بهنجار شده χ^2 به صورت زیر است

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_j A_{ij} m_j - d_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (4)$$

که σ_i انحراف از معیار آمین داده می‌باشد. برای مثال هر مدل m که برای آن $\chi^2 < 1$ ، داده‌ها را در حد یک انحراف از معیار استاندارد پیش‌بینی می‌کند. اما در عمل چگونه می‌توان σ_i را تعیین کرد. در خیلی از مثالهای منتشر شده از محاسبات معکوس شامل داده‌های واقعی، یا از قبل مقداری را برای خطای داده‌ها در نظر گرفته می‌شود (Scales, 1987)، یا با بهینه کردن اختلاف بین داده‌های پیش‌بینی شده و مشاهده شده از خطا چشم پوشی می‌شود. اما در حالت اخیر این سؤال پیش خواهد آمد که اختلاف آنها چه موقع بهینه است. در هر حال، هنگام حل مسائل معکوس به کار بردن عدم قطعیت داده‌ها کمی

با تحلیل خطای عملیات شروع می‌شود، همانند ثبت نوفه زمینه (Gouveia and Scales, 1998). تحلیل خطا برای هر عملیات ژئوفیزیکی کاملاً پیچیده و شامل تعداد زیادی مجهولات است. هدف از این مقاله تخمین مؤلفه نوفه در داده‌ها و به دست آوردن مجموعه‌ای از مدلهاست که داده‌ها را در حد نوفه تخمین زده شده پیش‌بینی کنند. با ادغام این مجموعه از مدلها و مجموعه مدلهای حاصل از اطلاعات اولیه در مورد پارامترهای مدل مجموعه محدودتری از مدلها به دست خواهد آمد. الگوریتم زیر برای تخمین عدم قطعیت داده‌ها و بررسی مدلهای معقول در مسائل معکوس خطی پیشنهاد می‌شود (غلامی، ۱۳۸۴). ابتدا با تنظیم تیخونف و استفاده از روش منحنی L_1 برای تعیین پارامتر تنظیم، پارامترهای مدل حاصل می‌شوند. بردار باقیمانده حاصل از این مدلها برای تخمین عدم قطعیت داده‌ها استفاده می‌شود، این تخمین خطا برای ساخت مجموعه‌ای از مدلها که داده‌ها را پیش‌بینی می‌کنند و همچنین با محدودیتهای دیگر موافق باشند، به کار می‌رود. هنگامی که یک مدل معقول به دست آمد، از اطلاعات اولیه برای ساخت بازه‌های اطمینان تصحیح شده از انحراف استفاده می‌شود.

۲- مسئله معکوس

در تئوری معکوس، پارامتر بندی ریاضیاتی که مشخصه سامانه فیزیکی است و برای پیش‌بینی داده‌ها لازم است را مدل می‌نامند. در علوم زمین، مدلها به طور معمول توابعی از مکان هستند و بنابراین عناصری از یک فضای بینهایت بعد، معروف به فضای مدل است. در این مقاله، یک تک‌عنصر از این فضا با m نشان داده می‌شود. در مقابل، نتیجه هر آزمایش تعداد محدودی مشاهده d است که در فضای داده قرار می‌گیرند. پیش‌بینی داده شامل تصویر نمودن عناصری از فضای مدل به فضای داده است. علاوه بر اینها، داده‌ها همیشه در معرض نوفه‌های تصادفی e و غیر تصادفی s هستند.

$$d = g(m_{true}) + e + s \quad (1)$$

که g عملگر مستقیم، m_{true} مدل اصلی است. خطاهای غیر تصادفی مربوط به قوانین وارد نشده در مسئله هستند. طبق تعریف، خطاهای تصادفی شامل تغییرات ایجاد شده در داده‌ها هستند که مجدداً قابل تولید نباشند. همچنین آن قسمت از داده‌ها که نباید پیش‌بینی شود (Scales and Snieder, 1998). در عمل معمولاً با گسسته نمودن عملگر مستقیم، مدلها به بردارهایی از پارامترها با بعد محدود تقریب می‌شوند. هر چه سطح گسستگی بهتر باشد، خطای ناشی از آن کمتر خواهد بود و تقریب کلی تر عملگر مستقیم منجر به تولید وقایع غیر واقعی در مدل می‌شود.

در رابطه ۱ برای بردار داده‌های مشاهده شده d ، هدف تخمین m_{true} (یا تابعی

اگر نوفه‌های غیر تصادفی در داده‌ها موجود نباشند، یک تخمین خوب از m_{true} به بردار باقیمانده‌ای منجر می‌شود که خطاهای e را به خوبی تقریب می‌کند. همان طوری که ملاحظه خواهد شد، روش به کار برده شده در اینجا به مدلی می‌رسد که بردار مؤلفه نوفه‌های تصادفی موجود در داده‌ها را تا ۹۹٪ تقریب می‌کند.

۴- حل مسئله معکوس

تا به حال بحث بر روی تخمین واریانس خطای تصادفی داده‌ها متمرکز بود. حال که عدم قطعیت داده‌ها تعیین شده است، مسئله استنباط (مشخص کردن مجموعه‌ای از مدل‌ها که تا حد امکان داده‌ها را پیش‌بینی نمایند) را می‌توان به کار برد. در اینجا هدف بررسی مسئله استنباط به طور خیلی وسیع نیست، بلکه بررسی خیلی ساده روشی است که می‌توان به کار برد. یکی از عوامل مهم در هر مسئله معکوس، اطلاعات اولیه در مورد مدل مورد مطالعه است. از آنجا که عملگر تصویر کننده داده معکوس پذیر نیست، معمولاً به دست آوردن عدم قطعیت محدود بر روی پارامترهای مدل بدون اطلاعات اولیه ناممکن است. در عمل، اطلاعات اولیه بر روی مدل اصلی ممکن است از اطلاعات زمین‌شناسی در مورد لایه‌بندی ناحیه مورد مطالعه یا از اندازه‌گیری‌های درون چاه‌های به‌دست‌آید (Gouveia and Scales, 1998).

اگر اطلاعات اولیه کافی موجود باشند، این امکان وجود دارد تا با به کار بردن توزیع احتمالات بیزین، تئوری و عملی، بتوان مجموعه‌ای از مدل‌های ممکنه را تعیین کرد (Gouveia and Scales, 1998; Scales and Tenorio, 2001). اما این بخش، به روش فریکونتیست برای استنباط متمرکز است. در اینجا با استفاده از اطلاعات اولیه معین، محدوده مدل‌هایی که داده‌ها را پیش‌بینی می‌نمایند کاهش می‌یابد. برای مثال، طبق Stark (1992) اگر

$$d = Am_{true} + e \quad (7)$$

به فرض این که مؤلفه نوفه مشخص شده باشد (همانند بخش قبل)، می‌توان یک مجموعه $\mathcal{E} \in R^n$ با اطمینان $1 - \alpha$ برای خطای داده‌ها به دست آورد

$$P[e \in \mathcal{E}] \geq 1 - \alpha \quad (8)$$

حال به فرض این که D مجموعه‌ای از مدل‌های m باشد که برای آنها $d - Am \in \mathcal{E}$ ، می‌توان گفت D تحت عمل عملگر مستقیم یک پیش فرض از \mathcal{E} خواهد بود. پس می‌توان گفت که D یک ناحیه با اطمینان $1 - \alpha$ برای مدل m_{true} می‌باشد

$$P[m_{true} \in D] \geq 1 - \alpha \quad (9)$$

مخالف با مقدار واقعی آن منجر به تفسیر غلط داده‌ها خواهد شد (غلامی، ۱۳۸۴).

در سالهای اخیر، روشهایی مانند تنظیم تیخونف با انتخاب پارامتر تنظیم توسط منحنی L برای یافتن پاسخ پایدار در مسائل معکوس با شرایط بد توسعه یافته‌اند (Li and Oldenburg, 1999). در این مقاله تخمین واریانس داده‌ها بر پایه بردار باقیمانده حاصل از مدل صورت می‌پذیرد. در اینجا از روش تنظیم تیخونف استفاده می‌شود، اما روشهای دیگری مانند SVD (singular value decomposition) و گرادیان مزدوج را نیز می‌توان برای فرایند بهینه سازی به کار برد.

۳- تخمین عدم قطعیت داده‌ها

هنگام تخمین پارامترهای مدل در محاسبات معکوس، تخمین عدم قطعیت داده‌ها ضروری است. اگر این تخمینها خیلی کمتر از مقدار واقعی باشند، ویژگیهایی در پارامترهای مدل ظاهر می‌شوند که هیچ ارتباطی با داده‌ها ندارند. اگر این تخمینها خیلی بزرگتر باشند، آنگاه همه آن ویژگیهایی که باید از داده‌ها به دست آیند، استخراج نمی‌شوند (غلامی، ۱۳۸۴). تخمین واریانس σ_i از i امین داده d_i به معنی تخمین توانایی تغییر d_i حول میانگین آن است.

$$\mu_i = (Am_{true})_i \quad (5)$$

با فرض این که واریانس ثابت باشد $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ، برای تخمین σ^2 از الگوریتم زیر استفاده می‌شود.

تنظیم تیخونف برای به دست آوردن مدل تخمین زده شده \hat{m}_λ با کمینه نمودن عبارت زیر محاسبه می‌شود

$$\min_m \|Am - d\|^2 + \lambda^2 \|Rm\|^2 \quad (6)$$

که R نوعی عملگر λ پارامتر تنظیم تیخونف هستند. آنگاه واریانس بردار باقیمانده $\|Am_\lambda - d\|^2$ به عنوان تخمینی از σ^2 مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای به دست آوردن مدل نیاز به انتخاب عملگر R و پارامتر تنظیم λ می‌باشد. اگر R ماتریس یکه باشد نقش آن میرایی و اگر عملگر مشتق دوم باشد نقش آن همواری مدل نهایی است.

پارامتر تنظیم λ تعیین کننده تعادل بین اختلاف داده‌ها و ساختار مدل یا داده‌ها است (Green and Silverman, 1994; Tikhonov and Arsenin, 1977).

روش منحنی L این تعادل را به عنوان تابعی از پارامتر بهینه می‌کند (Lawson and Hanson, 1974). این منحنی بر روی محورهای لگاریتمی به شکل "L" می‌باشد. طبق تعریف زانوی منحنی که نقطه‌ای با بیشترین انحنا است، به عنوان λ بهینه انتخاب می‌شود.



که $Z_{\alpha/2}$ برابر $1 - \alpha/2$ از توزیع گوسی استاندارد، $\hat{\sigma}^2$ واریانس تخمین زده شده در بخش ۳ با استفاده از منحنی L می‌باشد و λ بهینه توسط منحنی L حاصل می‌شود. این بازه به دست آمده به اندازه انحراف مدل تخمین زده شده (رابطه ۱۵) منتقل می‌شود.

$$\text{Bias}(\hat{m}_\lambda) \equiv E[\hat{m}_\lambda - m_{\text{true}}] = CRm_{\text{true}} = Bm_{\text{true}} \quad (15)$$

که

$$C = -\lambda^2 (A^T A + \lambda^2 R^T R)^{-1} R^T \quad (16)$$

$$B = CR \quad \text{و}$$

همچنین B را می‌توان با استفاده از ماتریس دقت به دست آورد؛

$$B = A_\lambda^\dagger A - I \quad (17)$$

دیده می‌شود که یک دقت خوب میزان انحراف کوچک تری خواهد داشت. در کل، میزان انحراف را نمی‌توان محاسبه کرد زیرا به مدل اصلی بستگی دارد. اما می‌توان از اطلاعات اولیه برای تعیین حدود انحراف پارامترهای مدل استفاده کرد (Xu, 1998). برای محدود کردن میزان انحراف کافی است توجه شود

$$\|\text{Bias}(\hat{m}_\lambda)\| = \|CRm_{\text{true}}\| \leq \|C\| \|R\| \|m_{\text{true}}\| \quad (18)$$

که C و R ماتریسهایی مشخص هستند. با اطلاعات اولیه بر روی $\|m_{\text{true}}\|$ یا $\|Rm_{\text{true}}\|$ می‌توان محدوده‌های انحراف را تعیین کرد. باید توجه نمود که اطلاعات اولیه بر روی $\|Rm_{\text{true}}\|$ نسبت به اطلاعات اولیه بر روی $\|m_{\text{true}}\|$ می‌تواند محدوده‌های انحراف را خیلی دقیق‌تر تعریف کند. زیرا انتخاب R با توجه به شناخت m صورت می‌گیرد. برای مثال، اگر از قبل هموار بودن m مشهود باشد، می‌توان با انتخاب R به عنوان عملگر مشتق دوم، $\|Rm\|$ را به اندازه کافی کوچک در نظر گرفت. اگر m در فضای تهی R قرار گیرد میزان انحراف صفر خواهد بود.

۴-۲- اعمال محدودیت بر مسئله

در بخش قبلی اطلاعات اولیه بر روی اندازه مدل در نظر گرفته شد. حال فرض می‌شود اطلاعات اولیه بر روی تک تک پارامترهای مدل در دست باشد، همان طور که در بخش قبلی گفته شد، هر مؤلفه انحراف یک تابع خطی از مدل اصلی است

$$[\text{Bias}(\hat{m}_\lambda)]_i = b_i^T m_{\text{true}} \quad (19)$$

که b_i سطر i ام از ماتریس B است. به فرض اگر از قبل مشخص باشد که هر مؤلفه مدل اصلی به صورت زیر متعلق به بازه C باشد

$$C: l_i \leq (m_{\text{true}})_i \leq u_i \quad (20)$$

آنگاه کمترین و بیشترین مقدار انحراف را می‌توان توسط مسائل برنامه ریزی

حال به فرض، اگر این اطمینان باشد که m_{true} در یک مجموعه C قرار دارد، این یک مثال از اطلاعات اولیه معین است. آنگاه CND یک مجموعه با اطمینان $1 - \alpha$ برای m_{true} خواهد بود. از آنجا که هر عنصر از CND ممکن است پارامتر واقعی مدل باشد، بنابراین می‌توان تمام مدل‌های این مجموعه را تعیین و انتخاب نمود و این همان مسئله استنباط می‌باشد. در نهایت این دیدگاه را می‌توان به این صورت خلاصه کرد: ابتدا مجموعه‌ای از مدل‌ها که پیش‌بینی کننده داده‌ها هستند به دست می‌آید. سپس با تداخل این مجموعه با مجموعه از قبل موجود برای محدودیت پارامترهای مدل (اشتراک دو مجموعه)، یک مجموعه محدودتر از مدل‌ها به دست می‌آید. مجموعه به دست آمده هم داده‌ها را پیش‌بینی می‌کند و هم محدودیت‌های از قبل موجود را رعایت می‌نماید.

۴-۱- تصحیح انحراف و بازه‌های اطمینان

روش توضیح داده شده در بالا نیاز به مدل خاصی ندارد. در اینجا با استفاده از یک تخمین کننده به دست آمده توسط تنظیم تیخونف، بازه‌های اطمینان تصحیح شده از انحراف برای پارامترهای مدل به دست خواهند آمد. برای ساخت بازه‌های اطمینان از مقادیر یک تخمین کننده، باید مقادیر انحراف و واریانس تخمین کننده تعیین شوند. یک تخمین کننده می‌تواند برای تغییرات تصادفی در داده‌ها پایدار باشد (اگر دارای واریانس کوچک باشد). از سوی دیگر، یک تخمین کننده حتی بدون انحراف می‌تواند نسبت به تغییرات داده‌ها بسیار حساس باشد (اگر دارای واریانس بزرگ باشد).

اگر A_λ^\dagger شبه معکوس تنظیم شده مرتبط با یک مقدار ثابت برای λ و \hat{m}_λ جواب تنظیم شده برای عبارت ۶ باشد

$$\hat{m}_\lambda = A_\lambda^\dagger d = (A^T A + \lambda^2 R^T R)^{-1} A^T A \quad (10)$$

که R یک عملگر تنظیم کننده است که پاسخ مسئله را میرا یا هموار می‌کند، ماتریس کواریانس به صورت زیر خواهد بود (غلامی، ۱۳۸۴).

$$\text{cov}(\hat{m}_\lambda) = A_\lambda^\dagger \text{cov}(d) A_\lambda^{\dagger T} \quad (11)$$

حال به فرض اینکه کواریانس داده‌ها به صورت زیر باشد

$$\text{Cov}(d) = \sigma^2 I \quad (12)$$

آنگاه واریانس i امین پارامتر مدل به صورت زیر خواهد بود

$$\text{Var}[(\hat{m}_\lambda)_i] = \sigma^2 (A_\lambda^\dagger A_\lambda^{\dagger T})_{ii} \quad (13)$$

برای ساخت بازه‌های اطمینان $1 - \alpha$ برای پارامترهای مدل از تقریب گوسی استفاده می‌شود (van Wijk et al., 2002).

$$(\hat{m}_\lambda)_i \pm Z_{\alpha/2} \hat{\sigma} (A_\lambda^\dagger A_\lambda^{\dagger T})_{ii}^{1/2} \quad (14)$$

خطی برای هر مؤلفه به دست آورد

$$\begin{cases} \max b_i^T m_{\text{true}} \\ m_{\text{true}} \in C \\ \max b_i^T m_{\text{true}} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ m_{\text{true}} \in C \end{cases} \quad (21)$$

هنگامی که بردار بهینه کننده برای هر مؤلفه انحراف تعیین شدند، مقادیر آنها برای تعیین حدود انحراف مدل تخمین زده شده به کار می‌روند.

اطلاعات اولیه اضافی بر روی همواری پارامترهای مدل را نیز می‌توان همانند رابطه ۲۱ همانند یک محدودیت در محاسبات وارد نمود. برای مثال

$$\begin{cases} \max b_i^T m_{\text{true}} \\ m_{\text{true}} \in C \end{cases} \quad (22)$$

با $\sum_j R_{ij}(m_{\text{true}})_j < v_i \quad i = 1, 2, \dots, m$ که بردار v تعیین کننده محدودیت مشتق و R عملگر مشتق دوم است. در این مثال یک مسئله خطی در نظر گرفته شده است، اما تحلیل بازه‌های اطمینان را می‌توان برای مسائل نیمه خطی نیز به کار برد (آنهايي که با خطی سازی تناوبی خطی می‌شوند).

۵- توموگرافی زمان سیر یک بعدی

این تحقیق بر روی یک مسئله توموگرافی یک بعدی گسسته از نیمرخ لرزهای قائم (VSP) انجام می‌شود. هندسه برداشت در شکل ۱a آمده است. یک تک چشمه تولید کننده امواج کشسان در روی سطح زمین درست بالای سر تعدادی گیرنده که در درون چاه قرار گرفته‌اند قرار دارد. چشمه یک پالس انرژی را تولید می‌کند و زمان رسیدهای این پالس به n گیرنده، بردار داده‌های d را می‌سازد. بردار مدل x از m لایه با ضخامتها و کندیهای ثابت تشکیل شده است. زمان سیر t در طول یک پرتو برابر انتگرال کندی محلی s (عکس سرعت v) در طول پرتو است (Scales and Smith, 2001).

$$t = \int_{\text{ray}} \frac{1}{v} dl = \int_{\text{ray}} s dl \quad (23)$$

عملگر مستقیم گسسته یک ماتریس A به ابعاد n در m است که عناصر a_{ij} آن برابر طول پرتوی i ام در لایه j ام می‌باشد. برای دور افت غیر صفر، رابطه ۲۳ به علت شکست پرتوها نسبت به s غیر خطی خواهد بود. اما این غیر خطی جزئی است و در عمل با خطی سازی متناوب بر طرف خواهد شد (Van Wijk et al., 2002). مدل کندی اصلی شامل کاهش کندی با عمق تا چهار کیلومتر حاوی یک افق با کندی بالا متمرکز شده در عمق

دو کیلومتری است شکل ۱b. یک مؤلفه نوفه غیر همبسته به دست آمده از توزیع گوسی شبه تصادفی با میانگین صفر $\mu=0$ و انحراف از معیار استاندارد $\sigma=0.2$ به داده‌ها اضافه شده است شکل ۲a. نمودار منحنی داده‌های مصنوعی همراه نوفه ساخته شده در این مثال در شکل ۲b نشان داده شده است.

۵-۱- تخمین مؤلفه نوفه

از اینجا به بعد اندیسه‌های I و L برای تخمین تیخونف به ترتیب هنگام استفاده از ماتریس Y و عملگر مشتق گیری گسسته به عنوان عملگر تنظیم تیخونف استفاده می‌شوند. همچنین با ایجاد تغییری در منحنی L ، منحنی جدیدی برای انتخاب پارامتر λ به دست می‌آید که بر روی محورهای لگاریتمی مقدار باقیمانده به عنوان تابعی از $(1/\lambda)$ رسم می‌شود. این حالت نیز با اندیس $(1/\lambda)$ نشان داده می‌شود.

برای حل مسئله، مجموعه‌ای از پارامترهای تنظیم λ انتخاب و برای آنها رابطه ۶ حل شده است. شکل استاندارد تنظیم (استفاده از ماتریس Y به عنوان عملگر تنظیم) و انتخاب پارامتر λ با استفاده از منحنی R_L (شکل ۳a) منجر به تولید مدلی می‌شود که بردار باقیمانده حاصل از آن تخمینی از مؤلفه نوفه در داده‌ها است (شکل ۳b). مقدار انحراف از معیار این مؤلفه نوفه $\hat{\sigma}_1 = 0.1966$ می‌باشد.

استفاده از عملگر مشتق دوم گسسته در رابطه ۶ و به دست آوردن پارامتر تنظیم توسط منحنی R_L (شکل ۴a) برای انتخاب پارامتر λ منجر به مدلی شده است که بردار باقیمانده حاصل از آن (شکل ۴b) انحراف از معیار داده‌ها را بهتر از حالت قبل پیش‌بینی می‌کند، $\hat{\sigma}_1 = 0.1982$.

روش کارآمد دیگر برای انتخاب پارامتر λ رسم مقدار باقیمانده بر حسب تابعی از $(1/\lambda)$ بر روی محورهای لگاریتمی است، (شکل ۵a). انتخاب λ با این روش منجر به مدلی شده است که بردار باقیمانده حاصل از آن (شکل ۵b) بسیار به مؤلفه نوفه در داده‌ها نزدیک است. مقدار انحراف از معیار این بردار باقیمانده، $\hat{\sigma}_{1/\lambda} = 0.1999$ نیز بسیار به مقدار واقعی آن، $\sigma = 0.2$ نزدیک است. تخمین ۹۸٪ بازه‌های اطمینان برای انحراف از معیار استاندارد مؤلفه نوفه در داده‌ها توسط روشهای بیان شده در جدول ۱ خلاصه شده‌اند.

۵-۲- مدل و انحراف آن

پاسخ تیخونف، با انتخاب پارامتر λ از منحنی R_L ، به عنوان مدل مورد نظر حاصل از معکوس سازی داده‌ها انتخاب شده است و با \hat{m}_1 نشان داده می‌شود. ماتریس کواریانس این مدل در شکل ۶a نشان داده شده است. ریشه



- کمترین مقدار بین $\hat{\sigma}_m$ و $(2 - \hat{m}_L)$ به عنوان $\hat{\sigma}_{max}$ (حد بالای پایداری) انتخاب شده است.
 - کمترین مقدار بین $\hat{\sigma}_m$ و \hat{m}_L به عنوان $\hat{\sigma}_{min}$ (حد پایین پایداری) انتخاب شده است.
 - بیشترین مقدار بین $(\hat{\sigma}_m - bias_{min})$ و $(-\hat{m}_L)$ به عنوان محدوده پایین بازه اطمینان انتخاب شده است.
 - کمترین مقدار بین $(\hat{\sigma}_m + bias_{min})$ و $(2 - \hat{m}_L)$ به عنوان حد بالای بازه اطمینان انتخاب شده است.
- نتیجه تمام محاسبات در شکل ۸ نشان داده شده است. محدوده پایداری با خطوط کوتاه‌تر بر روی پارامترهای مدل مشخص‌اند. جالب است که محدوده پایداری به دست آمده دقیقاً همان عدم قطعیت‌های به دست آمده از ریشه دوم اعداد روی قطر اصلی ماتریس کواریانس هستند. بازه اطمینان به دست آمده با خطوط بلندتر در طرفین پارامترهای مدل کشیده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، بازه اطمینان به دست آمده دقیقاً با مدل اصلی همخوانی دارد.

نتیجه‌گیری

همان‌طور که گفته شد، اطلاعات در مورد عدم قطعیت داده‌ها در حل مسائل معکوس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تمام روش‌های به کار گرفته شده در این مقاله برای تخمین عدم قطعیت داده‌ها بالای ۹۸٪ دقت دارند. با به دست آوردن عدم قطعیت داده‌ها، واریانس پارامترهای مدل محاسبه شد. این واریانس‌ها به همراه تصحیحات انحراف به دست آمده از اطلاعات اولیه بر روی مدل اصلی، منجر به ساخت بازه‌های اطمینانی شد که با مدل اصلی توافق کامل دارد.

سپاسگزاری

این مقاله از محل اعتبارات پژوهشی دانشگاه تهران در قالب طرح پژوهشی شماره ۶۲۰۱۰۰۴/۱/۰۴ انجام شده است. بدین وسیله از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه تهران و مؤسسه ژئوفیزیک تشکر می‌نمایم.

دوم اعداد روی قطر اصلی این ماتریس مقدار انحراف از معیار استاندارد پارامترهای مدل می‌باشند که به صورت میله‌های خطا بر روی هر پارامتر در شکل ۶b کشیده شده‌اند.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقدار واریانس پارامترهای مدل در سطح و ژرفای زیاد به نسبت بزرگ است، علت آن این است که در سطح، داده‌ها به نوبه حساس‌تر هستند و در ژرفای زیاد تعداد پرتوهای کمتری از لایه‌ها عبور می‌کند و بنابراین محدودیت داده‌ها بر پارامترها کمتر است.

منحنی میزان انحراف صحیح مدل (محاسبه شده با رابطه ۱۵) در شکل ۷a نشان داده شده است. با کم کردن این منحنی از منحنی پارامترهای مدل (شکل ۶b) منحنی پارامترهای مدل تصحیح شده از انحراف به دست آمده است (شکل ۷b). حال نتیجه به دست آمده تقریباً با مدل اصلی در توافق است. البته مقدار دقیق انحراف تابعی از مدل صحیح است که مجهول می‌باشد، اما در بخش بعد نشان داده می‌شود که چگونه با اطلاعات اولیه در مورد مدل اصلی می‌توان حدودی را برای میزان انحراف مدل تعیین کرد.

۵-۳- اعمال اطلاعات اولیه

ابتدا فرض بر این است که کمترین سرعت در لایه‌ها معلوم است که در اینجا نیم کیلومتر بر ثانیه می‌باشد. بنابراین می‌توان محدوده کندی را برای هر کدام از پارامترهای مدل به دست آورد و بازه C را تعریف کرد

$$C: 2 > (m_{true})_i > 0 \quad \forall i \quad (24)$$

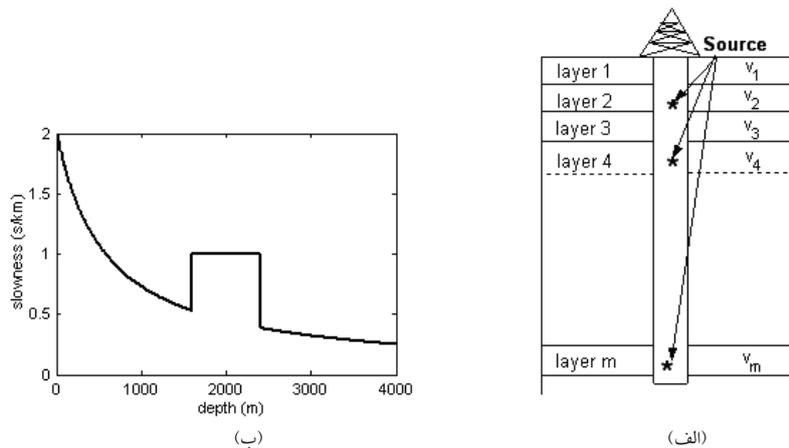
همچنین برای محدودتر نمودن پاسخ مسئله از اطلاعات همواری منحنی پارامترهای مدل کمک گرفته می‌شود. در اینجا مقدار مشتق دوم منحنی پارامترهای مدل بسیار کوچک در نظر گرفته شده است.

$$(Rm_{true})_i \leq 0.0001 \text{ s/km}^3 \quad (25)$$

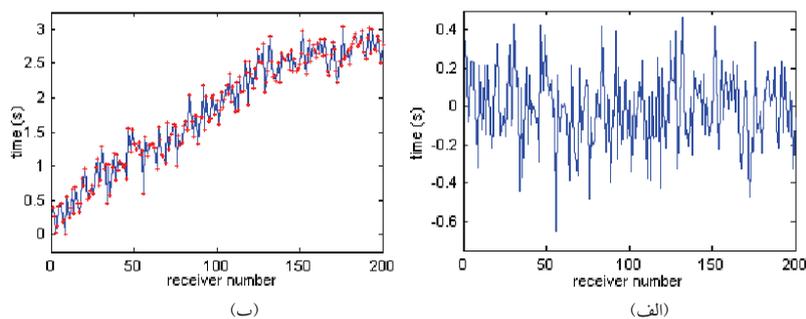
این فرض تقریباً همه جا صادق است، مگر در ناپیوستگی‌های با ناحیه کندی بالا. با اعمال این اطلاعات در روابط ۲۱ و ۲۲ بیشترین و کمترین میزان انحراف به دست خواهد آمد. اگر بیشترین و کمترین مقدار انحراف به ترتیب با $bias_{max}$ و $bias_{min}$ نشان داده شوند و عدم قطعیت پارامترهای مدل با $\hat{\sigma}_m$ بیان شود، آنگاه حدود انحراف و بازه پایداری پارامترهای مدل به صورت زیر به دست می‌آیند.

جدول ۱- تخمین ۹۸٪ بازه‌های اطمینان برای انحراف از معیار استاندارد صحیح داده‌ها $\sigma = 0.2$ بر حسب ثانیه.

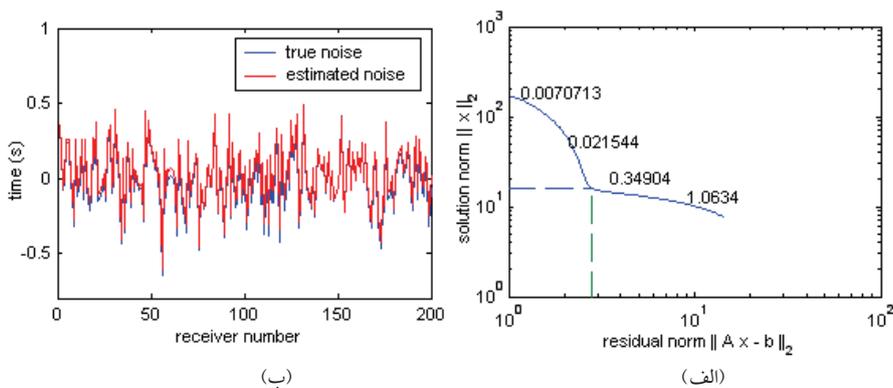
σ	σ_I	σ_L	$\sigma_{1/\lambda}$
۰/۲	۰/۱۹۶۶	۰/۱۹۸۲	۰/۱۹۹۹



شکل ۱- الف) هندسه برداشت از یک نیمرخ لرزه‌ای قائم. فاصله چشمه تا چاه صفر است اما برای نمایش به فاصله کمی از چاه رسم شده است. ب) منحنی پارامترهای مدل کندی اصلی.

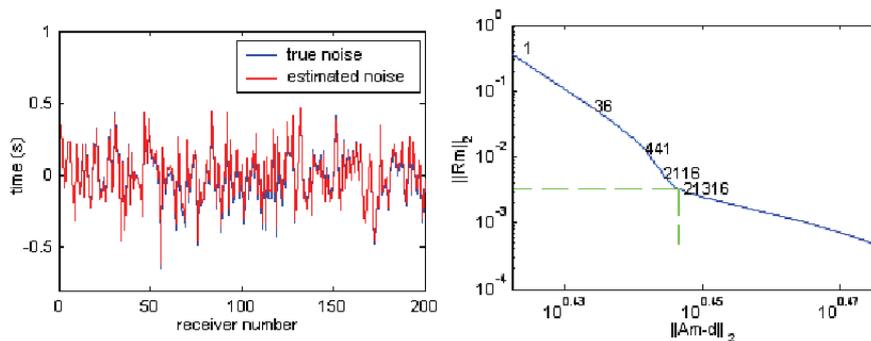


شکل ۲- الف) مؤلفه نوفه‌های تصادفی اضافه شده به داده‌ها با میانگین صفر ثانیه و انحراف از معیار ۰.۲ ثانیه. ب) داده‌های مصنوعی ساخته شده برای این مثال.



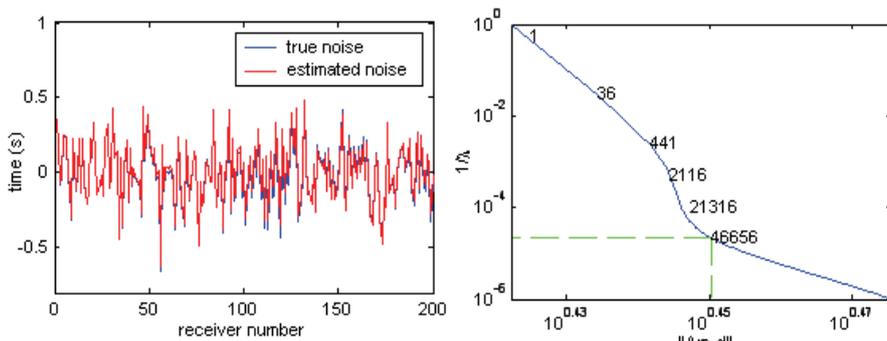
شکل ۳- الف) منحنی R_1

ب) نوفه حاصل از مدل به دست آمده از منحنی R_1 به همراه مؤلفه نوفه اصلی.



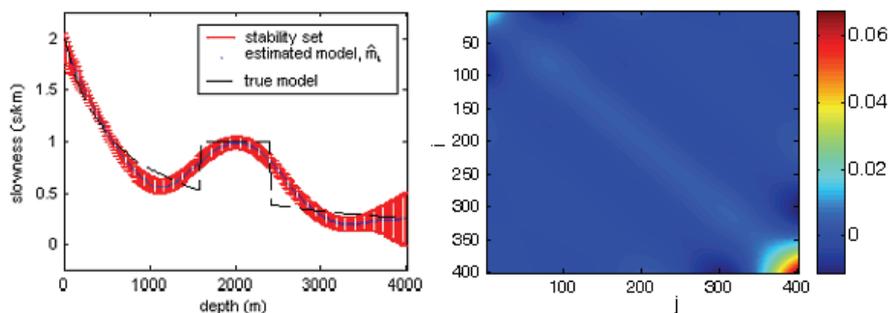
(ب) (الف)

 شکل ۴- الف) منحنی R_L .

 (ب) نوفه حاصل از مدل به دست آمده از منحنی R_L به همراه مؤلفه نوفه اصلی.


(ب) (الف)

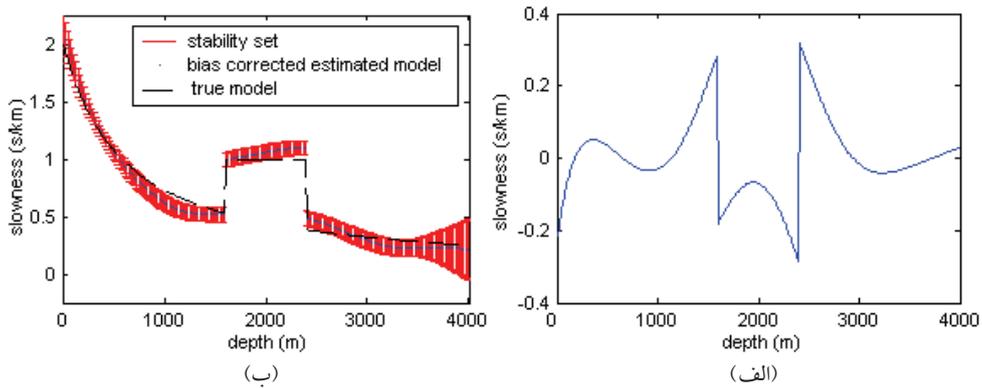
 شکل ۵- الف) منحنی $R_{1/2}$.

 (ب) نوفه حاصل از مدل به دست آمده از منحنی $R_{1/2}$ به همراه مؤلفه نوفه اصلی.


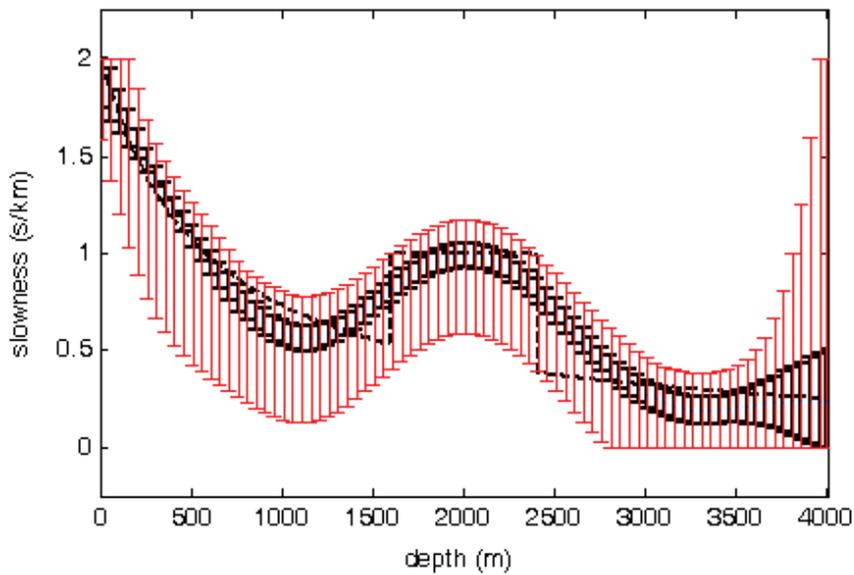
(ب) (الف)

شکل ۶- الف) ماتریس کواریانس مدل.

 (ب) مدل تخمین زده شده \hat{m}_L به همراه مدل اصلی. عدم قطعیت پارامترهای مدل به صورت میله‌های خطا بر روی پارامترها رسم شده‌اند.



شکل ۷- الف) منحنی انحراف مدل. ب) مدل تصحیح شده از انحراف به همراه مدل اصلی.



شکل ۸- تصحیحات انحراف برای شکل ۶- ب محدودۀ سیاه رنگ مربوط به بازۀ پایداری اولیه است. محدودۀ سرخ رنگ مربوط به بازۀ اطمینان است که از اطلاعات اولیه در مورد پارامترهای مدل به دست آمده است.

کتابنگاری

غلامی، ع.، ۱۳۸۴- بررسی عدم قطعیت در حل مسائل معکوس لرزه‌ای از طریق وارون سازی داده‌های پروفیل لرزه‌ای قائم، پایان نامه کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران.

References

- Gouveia, W. and Scales, J. A., 1998- Bayesian seismic waveform inversion: parameter estimation and uncertainty analysis: *J. Geophys. Res.*, 103, 2759–2779.
- Green, P. J. and Silverman, B. W., 1994 - Nonparametric regression and generalized linear models: A roughness penalty approach, Chapman and Hall, London.
- Lawson, C. L. and Hanson, R., J., 1974 - Solving least squares problems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Li, Y. and Oldenburg, D. W., 1999- 3-D inversion of DC resistivity data using an L-curve criterion, in Annual Meeting Abstracts, pp. 251–254, Society of Exploration Geophysicists.
- Scales, J. A., 1987- Tomographic inversion via the conjugate gradient method: *Geophysics*, 52, 179–185.
- Scales, J. A., Smith, M., L., 2001- Introductory geophysical inverse theory, Samizdat Press, Colorado School of Mine, Denver.
- Scales, J. A. and Snieder, R. K., 1998- What is noise?: *Geophysics*, 63, 1122–1124.
- Scales, J. A. and Tenorio, L., 2001- Prior information and uncertainty in inverse problems: *Geophysics*, 66, 389–397.
- Stark, P., 1992- Inference in infinite dimensional inverse problems: Discretization and duality: *J. Geophys. Res.*, 97, 14055–14082.
- Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., 1977- Solutions of Ill-posed problems, Winston, John Wiley and Sons, New York.
- Trampert, J. and Snieder, R. K., 1996- Model estimations biased by truncated expansion: Possible artifacts in seismic tomography: *Science*, 271, 1257–1260.
- Van Wijk, K., Scales, J. A., Navidi, W. and Roy-Chowdhury, K., 1998- Estimating Data uncertainties for least squares optimization, in Annual Project Review, Vol. CWP283, Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines, Golden.
- Van Wijk, K., Scales, J. A., Navidi, W. and Tenorio, L., 2002- data and model uncertainty estimation for linear inversion: *Geophys. J. Int.*, 149, 625–632
- Xu, P., 1998- Svd methods for linear ill-posed problems: *Geophys. J. Int.*, 135, 505–514.